

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΥΠΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΜΑΡΚ. ΑΛΥΣΙΔΑΣ.

Κοπώ το σύστημα σε συχνές αναχωρήσεις

f_n : οδ που παριστάνει τον αριθμό πελατών αμέσως μετά τη n -οστή αναχώρηση.

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n - 1 + A & f_n \geq 1 \\ A & f_n = 0 \end{cases}$$

όπου $A = 0$ αριθμός των πελατών που έρχονται κατά τη διάρκεια μιας εγγραφής.

Η f_n : μια στοχ διαδ σε διακριτό χρόνο

με διακριτό χώρο καταστάσεων. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

Έχει τη ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ και Στατισότητα (ίδια κατανομή)

Δηλ. ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ

Ενδιαφέρον έχει ο λεγόμενος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος P

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mu\epsilon \quad p_{ij} = P(f_{n+1}=j / f_n=i)$$

P (από i να πάω στο j σε 1 βήμα)

Οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αθροίζουν στην μονάδα.

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Πινακός Μετάβασης 1 βήματος

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow b_k = P(A=k)$$

$$P_{00} = P(0 \rightarrow 0 \text{ σε 1 βήμα}) = P(j_{n+1}=0 / j_n=0) = P(A=0) = b_0$$

$$P_{01} = P(0 \rightarrow 1 \text{ σε 1 βήμα}) = P(j_{n+1}=1 / j_n=0) = P(A=1) = b_1$$

$$P_{10} = P(1 \rightarrow 0 \text{ σε 1 βήμα}) = P(j_{n+1}=0 / j_n=1) = P(A=0) = b_0$$

$$P_{11} = P(j_{n+1}=1 / j_n=1) = P(A=1) = b_1$$

$$P_{20} = P(j_{n+1}=0 / j_n=2) = P(A=-1) = 0.$$

✓ Δεν μπορεί να πάρει αρν. τιμή δισα Α αριθρος πελατων που ερχεται

$$P_{21} = P(A=0) = b_0$$

κλπ.

$$b_k = P(A=k) = P(\text{να έχω } k \text{ αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης})$$

$$b_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} b(t) dt$$

ΛΟΓΙΚΗ (συνέχεια αναλογισ)

$$P(A) = \sum P(A|B_i) P(B_i)$$

b_k αν του δώσω $b(t)$

Σε Μαθηματική Αλυσίδα: στόχος είναι να βρω τις ορισμένες πιθανότητες σε κατάσταση σταθερής ισορροπίας.

Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα εύρεση πιθανοτήτων σε σχέσεις αναχωρήσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ FOSTER

Σε μια μη διαχωρίσιμη ερχοδική μαρκοβιανή αλυσίδα $\exists$ το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ και είναι τω

$\underline{\Pi} = \underline{\Pi} P$. Αν επιπλέον $X = (x_0, x_1, \dots)$ λύση της $X = X P$ με $\sum |x_i| < +\infty$ τότε $\Pi = C X$ τω $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. (ΕΥΘΥ)

Αντίστροφα μια μη διαχωρίσιμη απεριοδική Μαρκ Αλυσίδα είναι ερχοδική (θετικά επαναληπτική) όταν $\exists X : X = X P$

- με
- i) ΟΧΙ όλα τα $x_i = 0$
 - ii) $\sum |x_i| < +\infty$

μη διαχωρίσιμη: Όταν όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν μεταξύ τους.

Επικοινωνεί η i με την j
 όταν $\exists n$ τω $P_{ij}^{(n)} > 0$
 $\exists m$ τω $P_{ji}^{(m)} > 0$

$i \longleftrightarrow j$ Υπάρχει τρόπος να πάω από την $i \rightarrow j$ και $j \rightarrow i$ σε οποδήποτε βήματα.

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots \end{bmatrix}$



ΟΛΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΟΥΝΟΥΝ.
 ΑΡΑ ΜΗ ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΗ

απεριοδική. μια μη διαχωρίσιμη αλυσίδα είναι απεριοδική αν $\exists$ ανακλήση.

Απο τον πίνακα $P = \dots \rightarrow$ Μη διαχωρίσιμη και απεριοδική (Δεν θέλει περεταίρω εξήγηση για το μάθημα αυτό)

$$\Pi = \Pi \cdot P \Rightarrow (\Pi_0 \Pi_1 \Pi_2 \dots) = (\Pi_0 \Pi_1 \Pi_2 \dots) P$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^0 & \Pi_0 = \Pi_0 b_0 + \Pi_1 b_0 \\ x^1 & \Pi_1 = \Pi_0 b_1 + \Pi_1 b_1 + \Pi_2 b_0 \\ x^2 & \Pi_2 = \Pi_0 b_2 + \Pi_1 b_2 + \Pi_2 b_1 + \Pi_3 b_0 \\ & \vdots \end{cases}$$

Ορίσω $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Pi_i x^i, |x| < 1$

$$k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$$

Είναι: $\Pi(x) = \Pi_0 k(x) + \Pi_1 k(x) + \Pi_2 x k(x) + \dots$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \Pi_0 k(x) + \frac{k(x)}{x} (\Pi(x) - \Pi_0)$$

$$\Leftrightarrow \Pi(x) = \Pi_0 k(x) + \frac{k(x)}{x} (\Pi(x) - \Pi_0)$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \frac{\Pi_0 k(x) \left[1 - \frac{1}{x}\right]}{1 - \frac{k(x)}{x}} \Rightarrow \boxed{\Pi(x) = \frac{\Pi_0 k(x) (1-x)}{k(x) - x}}$$

Πως θα βρω το $\Pi(0)$?

Είναι $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Pi_i x^i$ άρα $\Pi(1) = 1$

Επίσης $k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i \Rightarrow k(1) = 1.$

Παιχνύ Hospital:

$$\frac{\pi_0 k'(x) (1-x) + \pi_0 k(x) (-1)}{k'(x) - 1}$$

Για $x=1$ είναι: $k(1)=1$ και $k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$

$$k'(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} i b_i x^{i-1} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots$$

$$k'(1) = \sum_{i=0}^{+\infty} i b_i \Rightarrow k'(1) = E \left[\begin{array}{l} \text{αριθμός αφίξεων} \\ \text{κατά τη διάρκεια} \\ \text{μιας εξυπηρέτησης} \end{array} \right]$$

$P(A=i)$
P(να έχω i αφίξεις κατά τη διάρκεια εξυπηρέτησης)

$$\text{Άρα } 1 = \frac{-\pi_0 k'(1)}{k'(1) - 1} \Rightarrow \pi_0 = 1 - k'(1)$$

Ισοδύναμα:

$$\pi_0 = 1 - \lambda \cdot E[\text{χρόνος εξυπηρέτησης}]$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$$

Επομένως

$$\pi(x) = \frac{(1-\rho) k(x) (1-x)}{k(x) - x}$$

Ας προσδιορίσουμε τώρα την $k(x)$.

$$\text{Είναι } k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i b_i$$

$$\text{Όμως } b_i = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} b(t) dt.$$

Επομένως

$$k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} b(t) dt$$

$$k(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x t)^i}{i!} e^{-\lambda t} b(t) dt$$

$$k(x) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x t} e^{-\lambda t} b(t) dt$$

$$k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - \lambda x)t} b(t) dt$$

$$= b^*(\lambda - \lambda x)$$

όπου $b^*(\cdot)$ ο μετασμός Laplace της $b(\cdot)$.

$$\text{Άρα } \Pi(x) = \frac{(1-p) k(x) (1-x)}{k(x) - x}$$

$$\Pi(x) = \frac{(1-p) b^*(\lambda - \lambda x) (1-x)}{b^*(\lambda - \lambda x) - 1} \quad \text{όπου } b^*(\cdot)$$

ο μετασμός Laplace της $b(t)$

$$\text{και } k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i b_i$$

$$\text{με } b_i = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} b(t) dt.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ① Κατά τη διαίρεση της προηγούμενης διερεύνησης είχαμε ότι:

$$\Pi_0 = 1 - p \Rightarrow \boxed{p = 1 - \Pi_0.}$$

Δηλαδή η πυκνότητα κυκλοφορίας είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης μέσα στο σύστημα τη χρονική στιγμή t που τελειώνει μια εξυπηρέτηση και κατ'επέκταση σε οποιοδήποτε χρονική στιγμή.

- ② Προσδιορίσαμε πλήρως την $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Pi_i x^i$ $|x| < 1$ Ελπίσουμε να το φερ
στην μορφή $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$

Από αυτή την σχέση είναι αδύνατο να βρει κανείς τις πιθανότητες Π_i , χωρίς να καθορίσει την $b(t)$ Σε ειδικές περιπτώσεις

Μπορούμε όμως να την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα κατά τις χρονικές στιγμές των αναχωρήσεων.

Πως?

$$L_D = \sum_{i=0}^{+\infty} i \Pi_i \quad \text{όμως} \quad \Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Pi_i x^i$$

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \sum_{i=0}^{+\infty} i \Pi_i x^{i-1} \quad \text{και} \quad \left. \frac{d\Pi(x)}{dx} \right|_{x=1} = \sum_{i=0}^{+\infty} i \Pi_i$$

$$\text{Άρα} \quad L_D = \left. \frac{d\Pi(x)}{dx} \right|_{x=1}$$

Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα μετά από μεγάλο χρ. διάστημα σε χρον. στιγμές αναχωρ.

$$\text{Υπενθύμιση} \quad \Pi(x) = \frac{(1-p) k(x)(1-x)}{k(x) - x} \quad \text{ή} \quad \Pi(x) = \frac{(1-p) b^*(\lambda - \lambda x)(1-x)}{b^*(\lambda - \lambda x) - 1}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Μέχρι συχνής κατορθώσαμε να βρούμε με τη μέθοδο της υπεισερχόμενης Μ.Α την γενήτρια συν/ση $\Pi(x)$ και τον μέσο αριθμό L_D αλλά πάντα σε συχνές αναχωρήσεων.

Πως επιτυγχάνεται η γενίκευση για οποιαδήποτε χρονική συχνή;

ΘΕΩΡΗΜΑ Burke

Έστω $f(t)$ μια σ.δ της οποίας τα δειγματικά ίχνη είναι βηματικές συν/σεις με μοναδιαίες αυφοκειώσεις.

Ας είναι $\bar{t}_n$ οι χρονικές συχνές αύξησης και $\underline{t}_n$ οι χρονικές συχνές μείωσης. ^{αναχωρήσεις}

$$\text{Έστω } \bar{\Pi}_k = \lim P[f(\bar{t}_n - 0) = k]$$

$$\hat{\Pi}_k = \lim P[f(\underline{t}_n + 0) = k]$$

Τότε αν f το ένα όριο υπάρχει και το άλλο και είναι ίσα.

PASTA (Poisson Arrivals See Time Average)

Έστω $f(t)$ η σ.δ που περιγράφει τις καταστάσεις ενός συστήματος εξυπηρέτησης κι έστω $A(t)$ ο αριθμός των πελατών που φτάνουν στο $(0, t)$.

Αν i) $\{A(t): t \geq 0\}$ είναι Poisson διαδικασία με πεπερασμένη παράμετρο.

ii) για όλα τα $t \geq 0$ το $\{A(t+u) - A(t), u \geq 0\}$ ανεξίτητο του

$\{f(u): 0 \leq u \leq t\}$ δηλ. μελλοντικές αφίξεις δεν επηρεάζονται από τον αριθμό των πελατών που υπάρχουν στο σύστημα.

Τότε $\forall t \geq 0$ και $u \geq 0$ σε συχνές αφίξεων.

$$P[f(t-0) \in B] = P[f(t-0) \in B / A(t) - A(t-u) \geq 1]$$

οποιαδήποτε συχνή

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Burke $\rightarrow$ Πιθανότητες σε συχνές αφίξεις = πιθανότητες σε συχνές αναχωρήσεις.

PASTA $\rightarrow$ Πιθανότητες σε συχνές αφίξεις ίσες με τις αντιστοιχές σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Συνδυάζονται τα και καθώς ικανοποιούνται στο $M/G/1/\infty$ προκύπτει ότι όσα βρήκαμε σε συχνές αναχωρήσεων ισχύουν για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Συνοψίζοντας για το $M/G/1/\infty$ έχουμε:

$$\Pi(x) = \frac{(1-\rho)(1-x)b^*(\lambda-\lambda x)}{b^*(\lambda-\lambda x)-x}, |x| < 1$$

$$L_0 = \left. \frac{d\Pi(x)}{dx} \right|_{x=1}$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

• $M/M/1/\infty$

Είναι $b(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

$$b^*(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mu e^{-\mu t} dt \Rightarrow b^*(x) = \frac{\mu}{\mu+x} \int_0^{+\infty} (\mu+x) e^{-(\mu+x)t} dt = \frac{\mu}{\mu+x}$$

Επίσης $\rho = \lambda \cdot E(\overset{\text{χρόνος}}{\underset{E(\text{εκκμ})}{\text{εξυπηρέτησης}}}) \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Άρα

$$\Pi(x) = \frac{(1-p)(1-x) \frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda x}}{\frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda x} - 1} \Rightarrow$$

$$\Pi(x) = \frac{(1-p)(1-x)\mu}{\mu - x(\mu+\lambda-\lambda x)} \Rightarrow$$

$$\Pi(x) = \frac{(1-p)(1-x)\mu}{\lambda x^2 - (\mu+\lambda)x + \mu} \Rightarrow$$

$$\Pi(x) = \frac{(1-p)(1-x)\mu}{\lambda(1-x)\left(\frac{\mu}{\lambda} - x\right)}$$

Καθώς ο παρονομαστής έχει δύο ρίζες : $1, \frac{\mu}{\lambda}$

Επομένως: $\Pi(x) = \frac{1-p}{p(1/p-x)} = \frac{1-p}{1-px}$

$\xrightarrow{\text{για } p < 1}$ $\Pi(x) = (1-p) \sum_{i=0}^{+\infty} (px)^i$

Επομένως καθώς $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i x^i$

προκύπτει ότι $\pi_i = (1-p)p^i, p < 1$

Καθώς $\Pi(x) = \frac{1-p}{1-px}$

Είναι $\frac{d\Pi(x)}{dx} = (1-p)p(1-px)^{-2}$, άρα $\left. \frac{d\Pi(x)}{dx} \right|_{x=1} = (1-p)p(1-p)^{-2}$

Ενοπέτως $L_D = \left. \frac{d\pi(x)}{dx} \right|_{x=1} = \frac{\rho}{1-\rho}, \rho < 1.$